Niz skupova $\{F_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je opadajući, pa na osnovu Teoreme 2.1 za $F = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} F_k$ važi da je $F \in \mathcal{M}$ i $\mu(F) = 0$.

Ako je $h \le k$, tada $g_h(x) = g_k(x)$, $x \in F_h^c$. Dakle, niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira na čitavom skupu X ka merljivoj funkciji koju ćemo označiti sa f.

Ako $x \in F_k^c$, tada je $f(x) = g_k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dakle, niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira ka f na F^c, tj. konvergira skoro svuda ka f na X.

Ostalo je još da pokažemo da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno konvergira ka f. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ dovoljno veliko da važi $2^{-k_0+1} < \varepsilon$. Tada $\mu(F_{k_0}) < \varepsilon$ i niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira uniformno ka $g_{k_0} = f$ na $X \setminus F_k$. ■

Propozicija 9.5. Ako niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro uniformno ka f, tada konvergira i u meri. Obratno, ako $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f, tada ima podniz koji konvergira skoro uniformno ka f.

Dokaz: Neka niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno konvergira ka f. Neka su $\alpha, \varepsilon > 0$. Tada postoji skup $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, takav da $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira ka f na $X \setminus E_\varepsilon$. Tada, za dovoljno veliko $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\{x \in X; \mid f_n(x) - f(x) \mid \ge \alpha\} \subseteq E_\varepsilon,$$

odakle sledi da $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f.

Obratno, pretpostavimo da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka funkciji f. Prema Teoremi 9.1 sledi da postoji podniz $(f_{\nu_n})_{n\in\mathbf{N}}$ koji konvergira skoro svuda ka funkciji f. Šta više, dokaz te teoreme pokazuje da je ta konvergencija skoro uniformna. ■

Primenom prethodne propozicije i činjenice da $L^p(X)$ konvergencija implicira konvergenciju u meri, zaključujemo da ako niz konvergira u $L^p(X)$, tada on ima podniz koji konvergira skoro uniformno. Primer niza funkcija navedenih u Primeru 9.2 pokazuje da obrnuto ne važi tj. da skoro uniformna konvergencija u opštem slučaju ne implicira konvergenciju u $L^p(X)$. Ipak, uz dodatni uslov o postojanju Lebeg integrabilne dominante ova implikacija važi.

Jedna od posledica Propozicije 9.4 je da skoro uniformna konvergencija implicira skoro svuda konvergenciju. Bez uslova $\mu(X) < +\infty$ obrnuto ne važi, što pokazuje primer niza funkcija navedenih u Primeru 9.4.

Teorema 9.3. (Teorema Egorova.) Neka je $\mu(X) < \infty$ i $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz realnih merljivih funkcija koji konvergira skoro svuda ka realnoj merljivoj funkciji f. Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro uniformno i u meri ka f.

Dokaz: Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u svakoj tački skupa X ka f.